

# 单元素养测评卷(一)

## 第一章

时间:120分钟 分值:150分

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 给出下列命题:

- ①将空间中所有的单位向量平移到同一个点为起点,则它们的终点构成一个圆;
- ②若空间向量  $a, b$  满足  $|a| = |b|$ , 则  $a = b$ ;
- ③在正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中,必有  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A_1C_1}$ ;
- ④若空间向量  $a, b, c$  满足  $a = b, b = c$ , 则  $a = c$ ;
- ⑤空间中任意两个单位向量必相等.

其中假命题的个数是 ( )

- A. 1
- B. 2
- C. 3
- D. 4

2. 在长方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中,  $\overrightarrow{AB} = a, \overrightarrow{AD} = b, \overrightarrow{AA_1} = c$ , 点  $M$  为  $A_1D_1$  的中点, 则  $\overrightarrow{CM}$  等于 ( )

- A.  $-a - \frac{1}{2}b + c$
- B.  $a + \frac{1}{2}b + c$
- C.  $-a + \frac{1}{2}b - c$
- D.  $-a - \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$

3. 已知  $A, B, C$  三点不共线,  $O$  是平面  $ABC$  外任意一点, 若  $\overrightarrow{OM} = 2\lambda\overrightarrow{OA} + \frac{2}{5}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{OC}$ , 则  $A, B, C, M$  四点共面的充要条件是 ( )

- A.  $\lambda = \frac{13}{60}$
- B.  $\lambda = \frac{17}{60}$
- C.  $\lambda = -\frac{17}{60}$
- D.  $\lambda = -\frac{13}{60}$

4. 已知向量  $a = (1, 0, 2), b = (x, 2, 2)$ , 且  $a \cdot b = 6$ , 则向量  $a$  与  $b$  的夹角的余弦值为 ( )

- A.  $\frac{1}{5}$
- B.  $\frac{\sqrt{10}}{5}$
- C.  $\frac{\sqrt{15}}{5}$
- D.  $\frac{3}{5}$

5. 在空间直角坐标系  $Oxyz$  中, 已知  $A(-1, 0, 0), B(1, 2, -2), C(0, 0, -2), D(2, 2, -4)$ , 则下列说法中错误的是 ( )

- A.  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 6$
- B.  $\overrightarrow{AC}$  与  $\overrightarrow{AB}$  夹角的余弦值为  $\frac{\sqrt{15}}{6}$
- C.  $A, B, C, D$  四点共面
- D. 点  $O$  到直线  $AB$  的距离是  $\frac{\sqrt{6}}{3}$

6. 已知四棱锥  $S-ABCD$  的底面  $ABCD$  是边长为 2 的正方形,  $SD \perp$  平面  $ABCD$ , 棱  $AB, SC$  的中点分别为  $E, F$ , 若异面直线  $EC$  与  $BF$  所成角的余弦值为  $\frac{\sqrt{5}}{5}$ , 则  $SD =$  ( )

- A.  $\frac{3}{2}$
- B. 4
- C. 2
- D. 3

7. 已知点  $P$  是棱长为 1 的正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  的底面  $A_1B_1C_1D_1$  上一点(包括边界), 则  $\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PD}$  的最大值为 ( )

- A.  $\frac{1}{2}$
- B.  $\frac{1}{4}$
- C. 1
- D.  $\frac{3}{2}$

8. [2023·湖南衡阳八中期中] 在空间直角坐标系  $Oxyz$  中, 经过点  $P(x_0, y_0, z_0)$ , 且法向量为  $m = (A, B, C)$  的平面的方程为  $A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$ , 经过点  $P(x_0, y_0, z_0)$  且一个方向向量为  $n = (\mu, \nu, \omega) (\mu\nu\omega \neq 0)$  的直线  $l$  的方程为  $\frac{x-x_0}{\mu} = \frac{y-y_0}{\nu} = \frac{z-z_0}{\omega}$ . 根据上面的材料解决下面的问题: 现给出平面  $\alpha$  的方程为  $x - y + \sqrt{2}z - 7 = 0$ , 经过点  $(0, 0, 0)$  的直线  $l$  的方程为  $\frac{x}{-3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{\sqrt{2}}$ , 则直线  $l$  与平面  $\alpha$  所成的角为 ( )

- A.  $60^\circ$
- B.  $120^\circ$
- C.  $30^\circ$
- D.  $45^\circ$

二、选择题:本题共3小题,每小题6分,共18分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求,全部选对的得6分,部分选对的得部分分,有选错的得0分.

9. 已知向量  $\overrightarrow{AB} = (2, 1, 0), \overrightarrow{AC} = (-1, 2, 1)$ , 则下列说法中正确的是 ( )

- A.  $\overrightarrow{AB}$  与  $\overrightarrow{AC}$  是共线向量
- B. 与  $\overrightarrow{AB}$  同向的单位向量是  $(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}, 0)$
- C.  $\overrightarrow{AB}$  和  $\overrightarrow{BC}$  的夹角的余弦值是  $-\frac{\sqrt{55}}{11}$
- D. 平面  $ABC$  的一个法向量是  $n = (1, 2, 5)$

10. 下列说法错误的是 ( )

- A. 若  $\{a, b, c\}$  是空间向量的一组基底, 则  $\{a-b, a+c, 2c-3b\}$  也是空间向量的一组基底
- B. 已知  $n$  是平面  $\alpha$  的一个法向量,  $m$  是直线  $l$  的一个方向向量, 若  $n \perp m$ , 则  $l // \alpha$
- C. 已知  $a, b$  不共线, 若  $m \perp a, m \perp b$ , 向量  $n = \lambda a + \mu b (\lambda, \mu \in \mathbf{R})$ , 且  $\lambda, \mu \neq 0$ , 则  $m \perp n$
- D. 已知  $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$  是空间中三个不共面向量, 若  $2\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB} = 4\overrightarrow{OC} - 3\overrightarrow{OA}$ , 则  $D, A, B, C$  四点共面

11. 已知  $m, n$  为空间中两条互相垂直的直线, 等腰直角三角形  $ABC$  的直角边  $AC$  所在直线与  $m, n$  都垂直, 斜边  $AB$  以直线  $AC$  为旋转轴旋转, 则 ( )

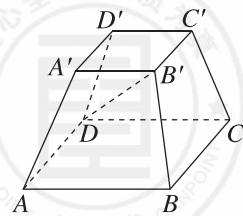
- A. 直线  $AB$  与  $m$  所成角的最小值为  $45^\circ$
- B. 直线  $AB$  与  $m$  所成角的最大值为  $60^\circ$
- C. 当直线  $AB$  与  $m$  成  $60^\circ$  角时,  $AB$  与  $n$  成  $60^\circ$  角
- D. 当直线  $AB$  与  $m$  成  $90^\circ$  角时,  $AB$  与  $n$  成  $45^\circ$  角

三、填空题:本题共3小题,每小题5分,共15分.

12. 在空间直角坐标系中, 点  $M(2, 1, -3)$  关于  $zOx$  平面的对称点的坐标为 \_\_\_\_\_.

13. 在空间四面体  $ABCD$  中,  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} =$  \_\_\_\_\_.

14. [2023·黑龙江齐齐哈尔高二期中] 如图, 在四棱台  $ABCD-A'B'C'D'$  中,  $AA' = 4, \angle BAD = \angle BAA' = \angle DAA' = 60^\circ$ , 则  $|\overrightarrow{DB'} - (x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD})| (x, y \in \mathbf{R})$  的最小值为 \_\_\_\_\_.

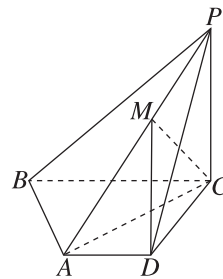


四、解答题: 本题共 5 小题, 共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

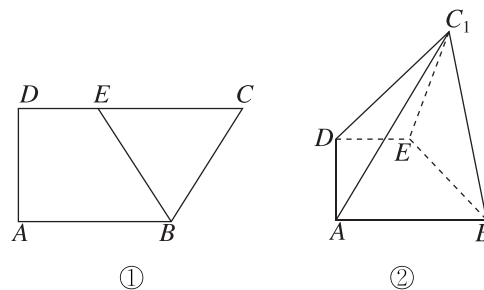
15. (13 分) 已知空间中三点  $A(-1, 1, 2), B(-1, 2, 4), C(1, 0, 4)$ .
- (1) 若点  $D$  (异于点  $A, C$ ) 在直线  $AC$  上, 且  $\overrightarrow{BD} \perp \overrightarrow{AC}$ , 求点  $D$  的坐标;
  - (2) 求  $\triangle ABC$  的面积.

16. (15 分) 已知空间中的三点  $P(-2, 0, 2), M(-1, 1, 2), N(-3, 0, 4), \overrightarrow{PM} = \mathbf{a}, \overrightarrow{PN} = \mathbf{b}$ .
- (1) 当  $k\mathbf{a} + \mathbf{b}$  与  $k\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$  的夹角为钝角时, 求  $k$  的取值范围;
  - (2) 求点  $M$  到直线  $PN$  的距离.

17. (15 分) [2023 · 陕西商洛高二期末] 如图, 四棱锥  $P-ABCD$  的底面是等腰梯形,  $AD \parallel BC, BC = 2AB = 2AD = 2, PC = \sqrt{3}, PC \perp$  底面  $ABCD, M$  为棱  $AP$  上的一点.
- (1) 证明:  $AB \perp CM$ ;
  - (2) 若二面角  $A-DC-M$  的余弦值为  $\frac{\sqrt{17}}{17}$ , 求  $\frac{PM}{PA}$  的值.



18. (17 分) [2024 · 黑龙江齐齐哈尔高二期末] 在直角梯形  $ABCD$  中,  $AB \parallel CD, \angle D = 90^\circ, AB = 2, CD = 3, \angle DCB = 60^\circ, E$  在线段  $CD$  上, 且  $CE = 2ED$ , 以  $BE$  为折痕将  $\triangle BCE$  折起, 使点  $C$  到达  $C_1$  的位置, 且  $AC_1 = \sqrt{6}$ , 如图②.
- (1) 求证: 平面  $BC_1E \perp$  平面  $ABED$ ;
  - (2) 在棱  $DC_1$  上存在点  $P$ , 使得锐二面角  $P-BE-A$  的大小为  $45^\circ$ , 求  $C_1$  到平面  $PBE$  的距离.



19. (17 分) 如图, 在四棱锥  $P-ABCD$  中,  $PA \perp$  平面  $ABCD$ , 底面  $ABCD$  为直角梯形, 且  $AB \parallel CD, AB \perp AD, PA = AB = 2, AD = DC = 1, E$  为  $PB$  上一点.
- (1) 若  $E$  为  $PB$  的中点, 求证:  $CE \parallel$  平面  $PAD$ ;
  - (2) 若点  $E$  不与  $P$  和  $B$  重合, 且二面角  $E-AC-P$  的余弦值为  $\frac{\sqrt{6}}{3}$ , 求  $AE$  与平面  $ABCD$  所成角的正切值.

